

Rácz László matematikaverseny

I. forduló (2009. október 22.)

A Fasor újraindításának 20. évfordulójára (9-10. osztály, 11.E osztály)

1. A 35 fős osztály az osztálykiránduláson, amelyre mind a 35 tanuló elment, salátát rendelt vacsorára. A vacsora végén kiderült, hogy háromféléet ettek: gyümölcssalátát, kukoricasalátát, tonhalsalátát, és mindenki rendelt valamilyet a három közül. Kukoricasalátát 14-en, gyümölcssalátát 15-en, tonhalsalátát 13-an.
- Egy diák rendelt mindháromból.
 - A kukoricasalátát rendelők közül 11-en nem kértek gyümölcssalátát.
 - A csak gyümölcssalátát rendelők eggyel többen voltak, mint a csak tonhalasat rendelők.
- a) Hány olyan tanuló volt, aki tonhalas és gyümölcssalátát is rendelt?
b) Hány olyan tanuló volt, aki csak kukoricás salátát rendelt? (15 pont)

2. Bizonyítsa be, hogy bármely a, b, c valós számra teljesül, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)! \quad (15 \text{ pont})$$

3. A 948 és a 417 mindegyikét ugyanazzal a kétjegyű számmal osztva ugyanazt a maradékot kapjuk.

Mennyi ez a maradék? És melyik ez a kétjegyű szám? (15 pont)

4. Az $f(x) = -x^2 + 2x + p$ függvény értékkészlete $]-\infty; 4]$.

Ábrázolja és jellemezze az f függvényt! (15 pont)

5. Szerkesszen háromszöget, ha adott az egyik oldala, a másik oldalához tartozó magassága és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonala.

($a = 5,5\text{cm}$, $m_b = 5\text{cm}$, $s_c = 4\text{cm}$.) (18 pont)

6. Bizonyítsa be, hogy az egységnyi sugarú kör belsejében adott négy különböző pont között van olyan kettő, amelynek a távolsága kisebb, mint $\sqrt{2}$!

Legalább hány pontot kell vennünk az egységsugarú gömbben, hogy biztosan legyen köztük két olyan pont, amelynek távolsága kisebb, mint $\sqrt{2}$?

(22 pont)

Beküldési határidő: 2009. november 22.

Cím: Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium, Matematika munkaközösség, 1071, Budapest, Városligeti fasor 17-21. A borítékra kérjük, írják rá, hogy „Rátz László matematikaverseny”, továbbá a versenyző évfolyamát!